

10. cvičení - Goniometrické substituce, odmocniny

 = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1 (Goniometrické substituce). Spočtěte následující integrály a určete maximální množinu existence.

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\int \frac{1}{\sin x} dx.$ | (e)  $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx.$ | (h) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx.$ |
| (b) $\int \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$ | (f) $\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx.$ | (i) $\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x + 3\sin^2 x} dx.$ |
| (c) $\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x} dx.$ | (g)  $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx.$ | (j) $\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx.$ |
| (d) $\int \frac{1}{2-\cos x} dx.$ | | |

Příklad 2 (Bez vzorového řešení). Spočtěte následující integrály.

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx.$ | (c) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx.$ | (e) $\int \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan x} dx.$ |
| (b) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^3 x} dx.$ | (d) $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} dx.$ | |

Příklad 3. Spočtěte následující integrály.

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\int \frac{\log x}{x-x \log x} dx.$ | (e) $\int \frac{e^{4x}+e^{2x}}{e^{3x}-1} dx.$ | (i) $\int \frac{1}{x(\log^3 x - 1)} dx.$ |
| (b) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} dx.$ | (f) $\int \frac{1}{x \log x \cdot \log(\log x)} dx.$ | (j) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx.$ |
| (c) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} dx.$ | (g) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} dx.$ | (k)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2-2x} dx.$ |
| (d)  $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x} dx.$ | (h) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}} dx.$ | (l)  $\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$ |

Příklad 4. Spočtěte následující integrály.

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\int \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3+\sqrt{x}} dx.$ | (c) $\int \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} dx.$ | (e) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} dx.$ |
| (b) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} dx.$ | (d) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$ | (f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx.$ |

Nápověda na druhé straně



Goniometrické substituce

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, dt = -\sin x dx$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, dt = \cos x dx$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
Pak

$$dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2}$$

- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
Pak

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu dt nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R(x, \sqrt[m]{x+a}), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - x_1|$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \implies t = \sqrt{a \frac{x - x_1}{x - x_2}}$
 - $ax^2 + bx + c$ nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$

